

7.1.2 Kartézské soustavy souřadnic II

Předpoklady: 7101

Zavedení kartézské soustavy souřadnic z minulé hodiny:

Kartézskou soustavou souřadnic v rovině nazýváme dvojici číselných os x , y v rovině, pro které platí:

1. obě osy jsou navzájem kolmé,
2. jejich průsečíku O odpovídá na obou osách číslo 0.

Př. 1: Pomocí definice pro kartézskou soustavu souřadnic v rovině zaved' soustavu kartézských souřadnic v prostoru.

Jsme v prostoru \Rightarrow

- potřebujeme tři souřadné osy x , y , z (prostor má tři rozměry),
- každé dvě osy na sebe musí být kolmé,
- nemáme zajištěno, že se osy protnou (v rovině je průsečík dvou kolmic jistý) \Rightarrow musíme si přidat podmínku společného průsečíku všech tří přímek.

Souřadnice v prostoru

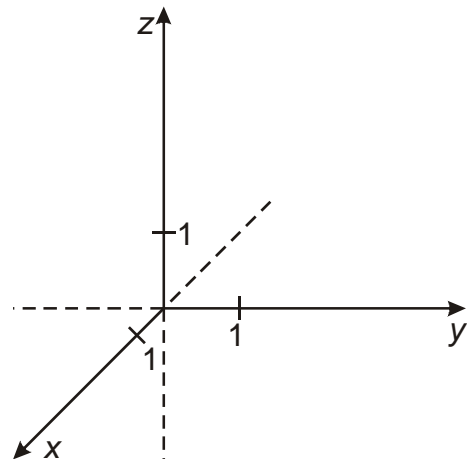
Kartézskou soustavou souřadnic v prostoru nazýváme trojici číselných os x , y , z v prostoru, pro které platí:

1. každé dvě z nich jsou navzájem kolmé,
2. všechny tři procházejí jedním bodem O ,
3. bod O odpovídá na všech osách číslu 0.

Terminologie:

- bod O – počátek kartézské soustavy souřadnic,
- přímky x , y , z – souřadné osy,
- roviny xy , xz , yz – souřadné roviny.

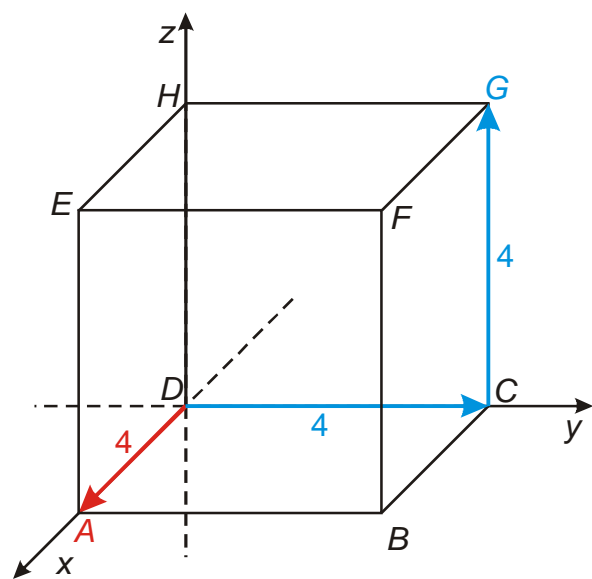
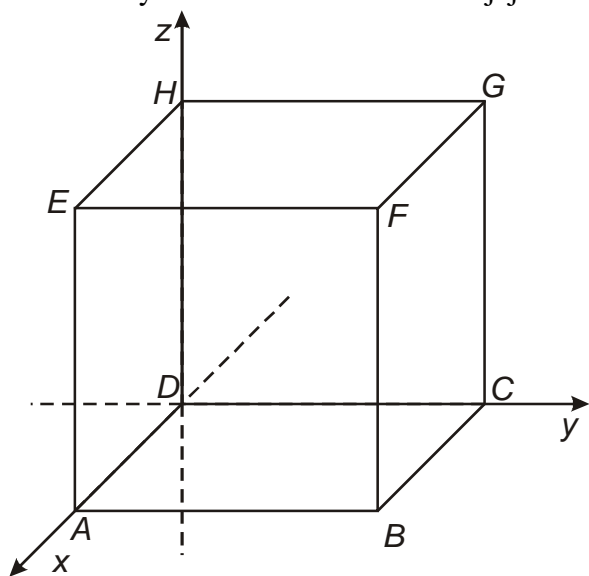
Pedagogická poznámka: Studenti často místo první podmínky píš' „všechny tři přímky jsou navzájem kolmé“. Vysvětlujeme si, že taková věta je sice z hlediska pochopení jasná, ale není příliš přesná, protože odchylku (a tedy i kolmost) určujeme pouze pro dvojici přímek.



Pedagogická poznámka: Ptám se studentů, zda jim nepřijde na obrázku něco divného. Vždy si někdo rychle všimne, že vzdálenost na ose x je menší než na ostatních osách. Připomínáme si, že jde o důsledek přenesení prostorové situace do roviny pomocí volného rovnoběžného promítání. Jednotková vzdálenost na ose x je samozřejmě stejná, ale úhel, ze kterého ji vidíme, nám ji při kreslení zkracuje.

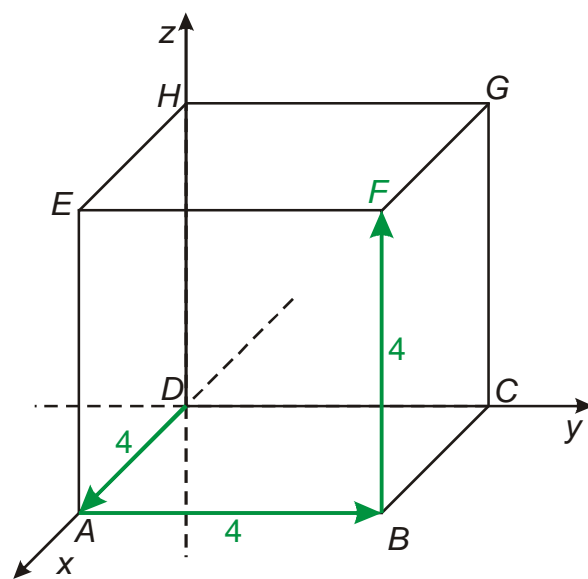
Pedagogická poznámka: Předchozí obrázek je nutné studentům ukázat, protože někteří mají tendenci popisovat osy jinak. Navíc je nutné u dalších příkladů zkontrolovat, zda mají osy popsány způsobem nakresleným výše. Pokud jsou osy popsány jinak, jsou souřadnice bodů samozřejmě jiné.

Př. 2: Na obrázku je ve volném rovnoběžném promítání zobrazena krychle $ABCDEFGH$ o délce hrany 4. Urči souřadnice všech jejích vrcholů.



Z počátku se do bodu A dostaneme posunutím o 4 ve směru osy $x \Rightarrow A[4;0;0]$.

Z počátku se do bodu G dostaneme posunutím o 4 ve směru osy y a o 4 ve směru osy $z \Rightarrow$



Z počátku se do bodu F dostaneme posunutím o 4 ve směru osy x , o 4 ve směru osy y a o 4 ve směru osy $z \Rightarrow F[4;4;4]$.

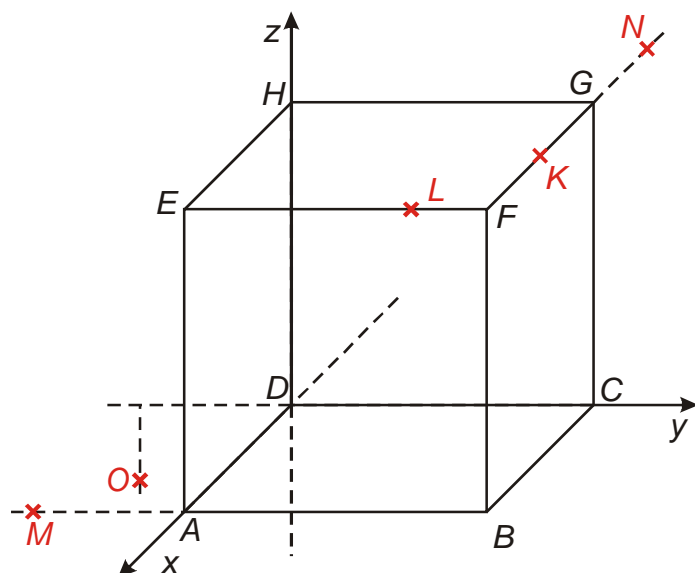
$G[0;4;4]$.

$A[4;0;0]$, $B[4;4;0]$, $C[0;4;0]$, $D[0;0;0]$

$E[4;0;4]$, $F[4;4;4]$, $G[0;4;4]$, $H[0;0;4]$

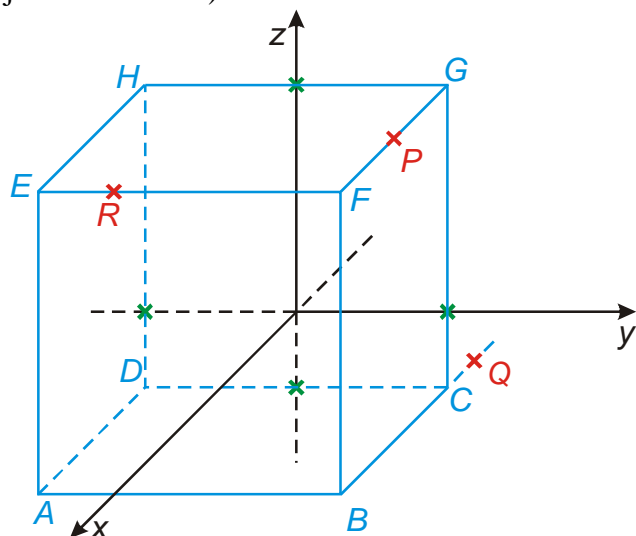
Pedagogická poznámka: Velká většina studentů chápe, jak mají souřadnice bodů najít. U té slabší menší části třídy je pak zbytečné vysvětlovat souřadnice jako průsečíky rovin s osami nebo průměty bodu do souřadných rovin. Použité zdůvodnění souřadnic pomocí vektorů posunutí ve směrech jednotlivých os je pro ně daleko přístupnější (o vektorech v této situaci samozřejmě nemluvíme).

Př. 3: Do obrázku krychle $ABCDEFGH$ z minulého příkladu zakresli body $K[2;4;4]$, $L[4;3;4]$, $M[4;-2;0]$, $N[-2;4;4]$ a $O[0;-2;-1]$. U bodů, které leží mimo hrany krychle, nakresli prodloužení příslušných hran nebo přímky, které jsou rovnoběžné s osami, tak, aby bylo zřejmé, kde body leží.



Př. 4: Na obrázku je ve volném rovnoběžném promítání zobrazena krychle $ABCDEFGH$ o délce hrany 4. Průsečíky hran se souřadnými osami jsou označeny zelenými křížky. Urči souřadnice všech vrcholů a bodů P , Q , R (předpokládej, že všechny souřadnice

jsou celočíselné).



$A[4; -2; -1]$, $B[4; 2; -1]$, $C[0; 2; -1]$, $D[0; -2; -1]$

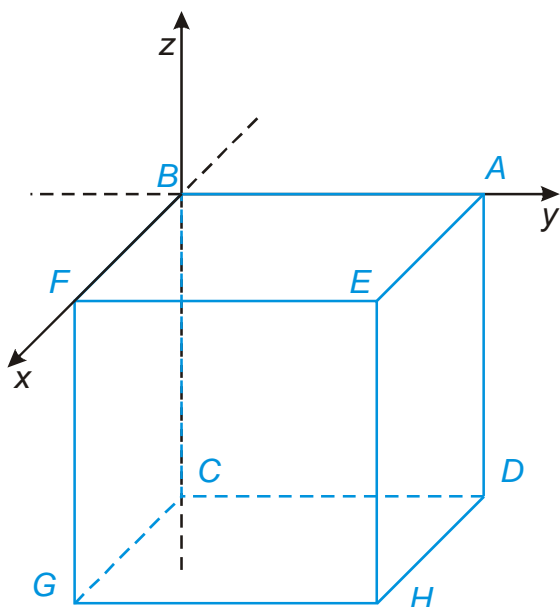
$E[4; -2; 3]$, $F[4; 2; 3]$, $G[0; 2; 3]$, $H[0; -2; 3]$

$P[2; 2; 3]$, $R[4; -1; 3]$, $Q[-1; 2; -1]$

Pedagogická poznámka: Studentů, kteří mají s příkladem problémy, se ptám, jak je krychle oproti příkladu 2 posunutá.

Pedagogická poznámka: Zbývající dva příklady nestíhají všichni. Hlavně poslední příklad je třeba brát jako spíše bonusový, tak dobrou představivost studenti nebudou příliš často potřebovat.

Př. 5: Zvol v prostoru soustavu kartézských souřadnic $Oxyz$. Do obrázku zakresli krychli $ABCDEFGH$ o hraně 4 cm, jestliže znáš souřadnice vrcholů $A[0; 4; 0]$, $C[0; 0; -4]$ a $G[4; 0; -4]$. Urči souřadnice ostatních vrcholů krychle.



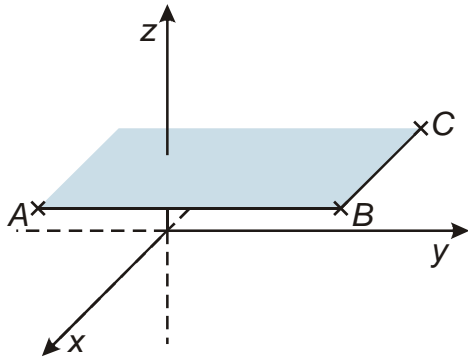
$A[0;4;0]$, $B[0;0;0]$, $C[0;0;-4]$, $D[0;4;-4]$

$E[4;4;0]$, $F[4;0;0]$, $G[4;0;-4]$, $H[4;4;-4]$

Pedagogická poznámka: Řešení je možné hledat dvěma způsoby. Nejdříve zakreslit soustavy souřadnic (klasicky), do ní umístit zadané body a pak se pokoušet dokreslit krychli (největší problém). Někteří studenti se snaží nejdříve zakreslit klasicky celou krychli a pak dokreslit soustavu souřadnic. Ještě jsem se nesetkal s nikým, komu by se to podařilo, proto se tuto slepou cestu snažím většinou rychle ukončit.

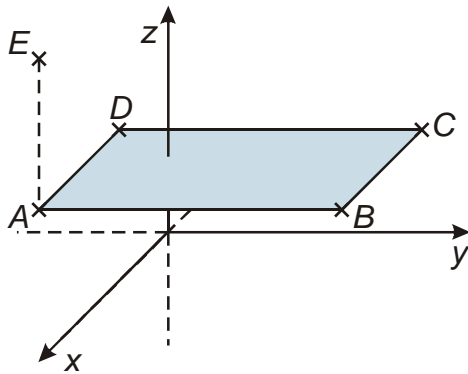
Př. 6: Zvol v prostoru soustavu kartézských souřadnic $Oxyz$. Do obrázku zakresli kvádr $ABCDEFGH$, jestliže znáš souřadnice vrcholů $A[2;-1;1]$, $B[2;3;1]$, $C[-1;?;1]$ a $E[?;?;3]$. Urči souřadnice ostatních vrcholů kvádru a jeho rozměry.

Zakreslíme vrcholy jejichž souřadnice známe: $A[2;-1;1]$, $B[2;3;1]$ a $C[-1;?;1]$, všechny mají stejnou z -vrou souřadnici \Rightarrow stěna $ABCD$ je vodorovná



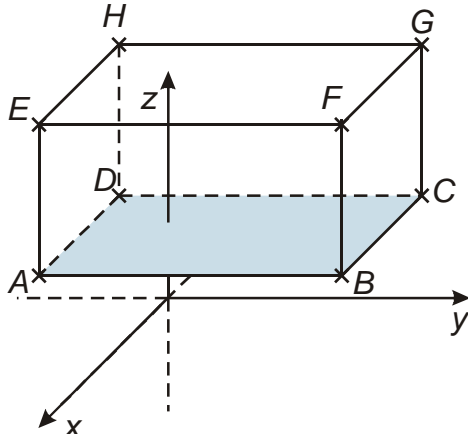
Přímka AB je rovnoběžná s osou $y \Rightarrow$ přímka BC na ni musí být kolmá a vodorovná \Rightarrow y -vá souřadnice bodů C a B je stejná \Rightarrow $C[-1;3;1]$.

Přímka AD musí být kolmá na přímku AB a vodorovná \Rightarrow y -vá souřadnice bodů A a D je stejná \Rightarrow $D[-1;-1;1]$.



Přímka AE je svislá \Rightarrow souřadnice bodů A a E se liší pouze v z -vé souřadnici \Rightarrow y -vá souřadnice bodů C a B je stejná \Rightarrow $E[2;-1;3]$.

Stejným způsobem souvisí souřadnice F a B , G a C a H a D .



$A[2;-1;1]$, $B[2;3;1]$, $C[-1;3;1]$,

$D[-1;-1;1]$

$E[2;-1;3]$, $F[2;3;3]$, $G[-1;3;3]$,

$H[-1;-1;3]$

$\Rightarrow a=4$, $b=3$, $c=2$

Shrnutí: Souřadnice nám říkají o kolik se musíme posunout ve směru jednotlivých souřadných os.